Artigos científicos / Scientific articles

O VÍRUS HIV: UMA PERSPECTIVA MATEMÁTICA

José Carmino Gomes Junior

Universidade Ibirapuera

Av. Interlagos, 1.329 - São Paulo - SP

mat.jose.carmino@gmail.com

Resumo

O tema desta pesquisa surgiu no curso de especialização em modelagem matemática da Universidade Federal do ABC. No curso foram propostos temas, a saber: Saúde; Meio ambiente; Esportes; Transportes; Educação; Segurança publica; Economia. Tais temas foram postos de maneira aberta onde cada participante encaminhou-se para um dos temas, ao qual encontrou maior afinidade. Como os temas foram postos de maneira abrangente, cada participante dedicou-se a um estudo de um sub tema. No caso o que deu origem a este trabalho de pesquisa, foi a Incidência de HIV/AIDS que é um sub tema da Saúde, é uma das maiores pandemias da historia, estando presente em todos os continentes do planeta, com crescente contagio. O método utilizado para esta pesquisa foi o da modelagem matemática, buscando criar modelos adequados para se trabalhar o tema no ensino fundamental e médio. O levantamento de dados deu-se através de banco de dados, disponibilizado por institutos de pesquisa em saúde publica. Ao analisar os dados, verificamos que há incidência de novos casos entre pessoas do sexo feminino de 13 a 19 anos, vem crescendo. Tais casos indicam uma grande necessidade de preparo do educador e de materiais adequados, visando uma conscientização de nossos educandos.

Palavras-chaves: Modelagem; Informática; Matemática.

Abstract

This research appeared in the course of specialization in mathematical modeling of the Federal University of ABC. In the course, some topics were proposed, like: Health, Environment, Sport, Transport, Education, Public Safety, Economics. These themes were openly where each participant choose one of the themes, which found a higher affinity. As the subjects were put in a comprehensive manner, each participant was dedicated to a study of a sub theme. In the event that gave rise to this research was the impact of HIV / AIDS which is a sub theme of Health, is one of the greatest pandemics in history, being present in all continents of the planet, as illustrated by the increasing spread Figure 1. The method used for this research was the mathematical model, seeking to create appropriate models to work the issue in elementary and high school. Data collection took place through the database, provided by research institutes in public health, especially [3]. When analyzing the data, we find that there is an incidence of new cases among females 13 to 19 years, is growing. Such cases indicate a great need for teacher preparation and suitable material, aiming at raising awareness of our students.

Keywords: Modeling, Computing, Mathematics, Models.

1 – Introdução

A Modelagem Matemática, processo que traduz a linguagem de fatos reais para o mundo matemático, não é em absoluto uma novidade. Remonta de tempos antigos onde o homem procura resolver problemas de sua existência com os recursos disponibilizados pelo próprio meio em que vivia. Buscando para isso conhecer e compreender o fato para depois solucioná-lo. Nas últimas décadas, a Modelagem Matemática vem sendo usada com maior frequência, ganhando espaço em discussões que norteiam o processo ensino aprendizagem.

No Brasil, estas discussões estão intimamente relacionadas a uma noção de trabalho com projetos. Onde os alunos são divididos em grupos e elegem temas de interesse para iniciarem uma pesquisa, neste contexto, a Matemática é posta como uma ferramenta para solucionar o problema. Este processo mostra uma forte influência antropológica, política e sócio-cultural. Já no movimento internacional a preocupação não é apresentada de forma transparente, isto é, a Modelagem Matemática é apresentada em termos de construção de modelos, e traduzida em esquemas explicativos.

Dizer que um modelo ou outro é correto não é objetivo deste trabalho, porém utilizar o que há de melhor em cada um dos modelos é de grande valia. Neste contexto, o objetivo central da pesquisa é a construção de modelos de incidência de novos casos de HIV/AIDS, que serão utilizados como objetos de aprendizagem e conscientização para o ensino fundamental e médio.

2 – A Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática é fundamentalmente um método distinto de qualquer outro que já fora estudado. O dinamismo é o grande diferencial da Modelagem Matemática, este dinamismo está relacionando com o conceito de que em um primeiro instante não é necessário uma preocupação do método Matemático para resolver o problema. Portanto ao resolver um problema dito real, tenta-se explicar, compreender e agir sobre o problema. Geralmente é utilizada a seleção de argumentos dentro do sistema estudado, considerando como parâmetros as variáveis essenciais, resultando assim em uma construção artificial do sistema inicialmente estudado. De fato os modelos são uma redução de casos do mundo real. É incontestável que para obter-se uma solução é essencial ter domínio de uma técnica, neste processo a redução ou simplificação sempre vem em primeiro lugar.

Ao enfrentar um problema que resulta em um modelo devemos ter em mente que – qualquer situação pode ser Modelada – basta utilizar a criatividade, experiência e os conhecimentos que temos a disposição. Reside neste fato que a Modelagem Matemática vem a atender as idéias citadas nos PCNs, onde foco principal esta apoiado em formar cidadãos mais críticos e criativos.

> “a atividade matemática não é olhar para coisas prontas e definitivas, a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade”.

Um problema clássico que ilustra bem aplicação e possibilidades da Modelagem Matemática, mesmo quando não se utilizava o termo Modelagem Matemática, é o problema da Área, discutido nos livros de calculo como introdução ao cálculo integral. A solução deste problema resultou em um novo campo de estudo da Matemática, neste aspecto é explicitado uma característica da Modelagem Matemática, a de em alguns casos resultar em um novo campo de estudo.

No mesmo viés do problema da área vem o problema da tangente, que consiste em encontrar uma tangente t a uma curva com uma equação y=f(x) em um dado ponto P. O problema é encontrar a inclinação da reta, para tanto temos que conhecer dois pontos da reta, porém o problema fornece somente um ponto. Para contornar o esta situação determina-se uma aproximação da inclinação da reta t, resultando na equação (1).

$$m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (1)$$

No caso foi utilizada uma Matemática já conhecida para formular a solução, atualmente os dois problemas já são bem relacionados, o cálculo diferencial e o cálculo integral. Porém, podemos partir destes dois problemas para generalizar a idéia principal da Modelagem Matemática, que é ser um método cientifico e uma metodologia para o ensino aprendizagem.

Vários pontos podem ser aglutinados para se justificar a Modelagem Matemática como método cientifico, porém destacamos apenas alguns, citados por [1].

- Estimular a formulação de novas idéias e técnicas experimentais;
- Trazer novas informações, mesmo as que não foram inicialmente objeto da pergunta feita pela pesquisa;
- Extrapolar e interpolar, dados resultando em previsões;
- Sugerir prioridades para aplicação de recursos e possíveis tomadas de decisão;

Após esta reflexão é aparente que a Modelagem Matemática tem vários aspectos promissores, ou ainda, favoráveis à sua utilização em sala de aula. Porém é fato que não existe teoria ou método que resolva todos os problemas existentes em sala, este fato decorre da imensa quantidade de variáveis envolvidas no processo ensino aprendizagem como diz [3].

> "Fala-se hoje, com insistência, no professor pesquisador. No meu entender o que há de pesquisador no professor não é uma qualidade ou forma de ser ou de atuar que se acrescente à de ensinar. Faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa. O de que se precisa é que, em sua formação permanente, o professor se perceba e se assuma, porque professor, como pesquisador"

Esta reflexão de [3] coloca o docente como verdadeiro pesquisador, onde surgem novos métodos e novas formas que devem sempre ser consideradas para que se obtenha um verdadeiro e concreto resultado.

3 – Epidemiologia

O levantamento de dados foi feito através da divulgação do Boletim Epidemiológico AIDS/DST (Brasil), são onde os mesmos foram analisados para construir o modelo.

Embora tenha havido redução da incidência de novas infecções em vários países o numero total de pessoas vivendo com HIV/AIDS continua aumentando em todas as regiões do mundo. Estima-se que em 2006 ocorreram 4,3 milhões de novas infecções e que havia 40 milhões de pessoas infectadas em todo o mundo (em 2003 a estimativa era de 37,5 milhões). A África continua sendo a região mais atingida, com mais de 60% dos infectados (fonte AIDS epidemic update 2007). Em 2006, mais de 2,9 milhes de pessoas morreram em virtude de condições associadas à infecção pelo HIV; destas, mais de 380.000 eram crianças, 72% dos óbitos ocorreram na África. Em relação aos anos anteriores, houve aumento da incidência de novas infecções no leste da Europa e na Ásia Central e do leste.

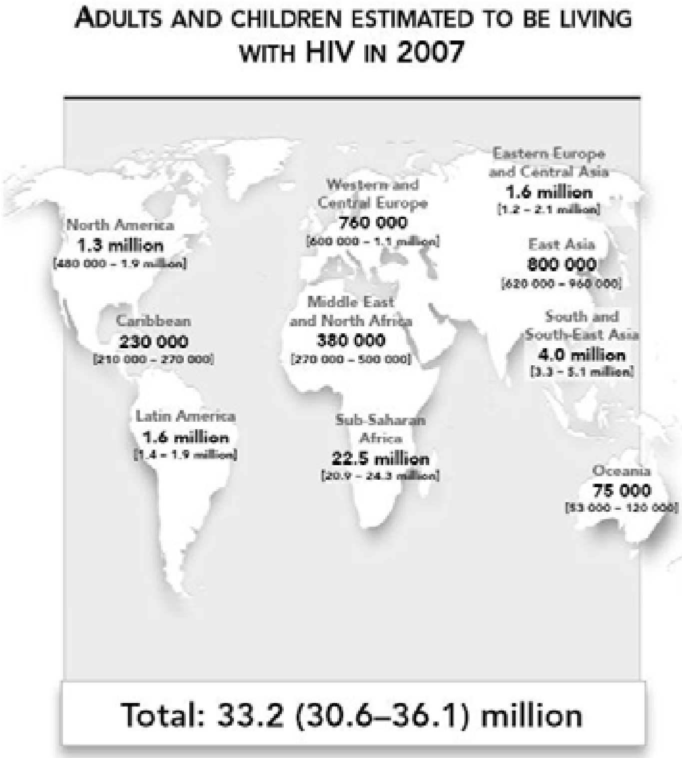

Figura 1 - Crianças e adultos que vivem com HIV em 2007.

No Brasil, no inicio dos anos 80, a epidemia atingia principalmente indivíduos homo/bissexuais masculinos, brancos, de classe média ou alta, habitantes das grandes metrópoles. Progressivamente, homens heterossexuais, mulheres e crianças de todas as classes sociais foram infectadas. Cumpre ressaltar que no Brasil são escassos os dados quanto á incidência e á prevalência da infecção pelo HIV. A maioria das informações disponíveis se refere aos casos de AIDS, isto é, indivíduos que desenvolveram imunodeficiência avançada, e não pessoas assintomáticas com infecção pelo HIV. Até junho de 2006, 433.067 casos haviam sido notificados ao Ministério da Saúde. Destes, 290.917 ocorreram em homens, enquanto que em 1997 esta relação atingiu 1:2, sendo, atualmente, de aproximadamente 1:1:5.

Em 2005, foram notificados 33.142 novos casos de AIDS, sendo 19.818 em homens e o restante em mulheres, mostrando crescimento da epidemia entre as pessoas do sexo feminino, particularmente com idade entre 13 e 19 anos, o que por hipótese é devido ao inicio precoce da atividade sexual Gráfico 1. Quanto as principais categorias de transmissão entre os homens, as relações sexuais responderam por 75% dos casos. Do total de casos notificados em indivíduos do sexo masculino, 45% ocorrem em heterossexuais, já entre indivíduos do sexo feminino, a transmissão do HIV também foi, predominantemente, pela via sexual, 95% dos casos.

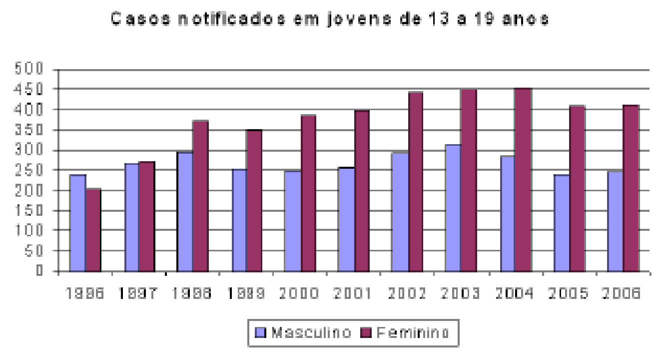

Figura 2 - Casos notificados em jovens de 13 a 19 anos. (Fonte: Boletim Epidemiológico AIDS/DST)

3.1 – Modelando a Região Norte do Brasil

Uma vez eleitos os dados, vide Tabela 1, a hipótese a verificada foi:

- A estabilização da infecção no Brasil, ocorre de maneira distinta nas diversas regiões brasileiras, o que é justificado na própria diversidade cultural do Brasil, característica de um país com dimensões continentais.

A primeira analise é estatística, para verificar a dependência ou não, entre as funções população e numero de casos notificados, é natural que ao excluir a população o número de casos notificados desaparece, o raciocínio caracteriza uma dependência entre as duas funções.

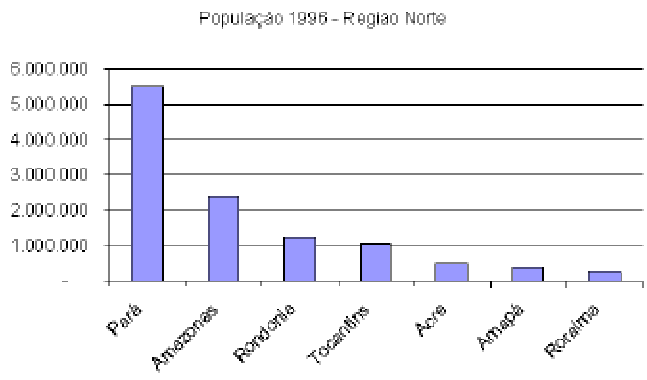

Figura 3 - População Região Note.(Fonte: IBGE censo)

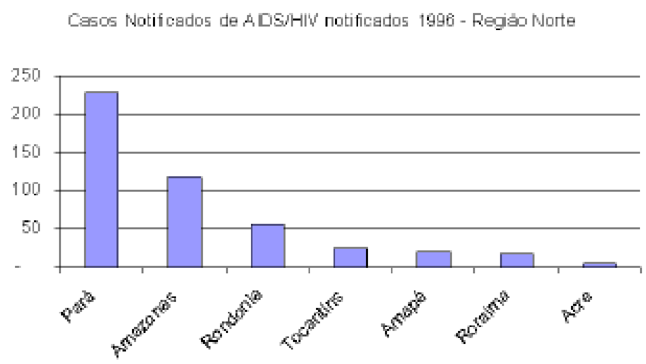

Figura 4 - Casos notificados por região.

(Fonte: Boletim Epidemiológico AIDS/DST)

O método de teste estatístico de hipótese vem a comprovar a dependência entre as duas funções.

H0: As variáveis são independentes.

H1: As variáveis não são independentes.

A comparação do valor do Qui-Quadrado foi executado no aplicativo Microsoft Excel Tabela 1 o que comprovou a dependência entre as funções.

Dados reais				Indice	Esperado		
Dados demograficos	População Residente	AIDS	NÂO AIDS	100000	População Residente	AIDS	NÃO AIDS
Norte							
Acre	483.726	6	483.720	1,24	483.726	20	483.706
Amazonas	2.389.279	119	2.389.160	4,98	2.389.279	101	2.389.178
Roraima	247.131	18	247.113	7,28	247.131	10	247.121
Pará	5.510.849	228	5.510.621	4,14	5.510.849	232	5.510.617
Amapá	379.459	21	379.438	5,53	379.459	16	379.443
Tocantins	1.048.642	26	1.048.616	2,48	1.048.642	44	1.048.598
Rondonia	1.231.007	57	1.230.950	4,63	1.231.007	52	1.230.955
Total	11.290.093	475	11.289.618	4,21	11.290.093	475	11.289.618
Corelação Pearson	0,986996372						
Valor de Prova	0,000069537						
Sudeste							
Minas gerais	16.673.097	1.667	16.671.430	10,00	16.673.097	4.155	16.668.942
Espirito Santo	2.802.707	245	2.802.462	8,74	2.802.707	698	2.802.009
Rio de Janeiro	13.406.379	3.541	13.402.838	26,41	13.406.379	3.341	13.403.038
São Paulo	34.120.886	11.245	34.109.641	32,96	34.120.886	8.503	34.112.383
Total	67.003.069	16.698	66.986.371	24,92	67.003.069	16.698	66.986.371
Corelação Pearson	0,940563009						
Valor de Prova	0,000000000						
Região Sul							
Paraná	9.003.804	1.158	9.002.646	12,86	9.003.804	1.515	9.002.289
Santa Catarina	4.875.244	1.123	4.874.121	23,03	4.875.244	820	4.874.424
Rio Grande do Sul	9.637.682	1.676	9.636.006	17,39	9.637.682	1.622	9.636.060
total	23.516.730	3.957	23.512.773	16,83	23.516.730	3.957	23.512.773
Corelação Pearson	0,646513034						
Valor de Prova	0,000000000						
Região centro-Oeste							
Mato Grosso do Sul	1.927.834	281	1.927.553	14,58	1.927.834	238	1.927.596
Mato Grosso	2.235.832	294	2.235.538	13,15	2.235.832	276	2.235.556
Goias	4.515.868	411	4.515.457	9,10	4.515.868	556	4.515.312
Distrito Federal	1.821.946	308	1.821.638	16,91	1.821.946	225	1.821.721
Total	10.501.480	1.294	10.500.186	12,32	10.501.480	1.294	10.500.186
Corelação Pearson	0,966365978						
Valor de Prova	0,000000000						
Região Nordeste							
Maranhão	5.222.565	183	5.222.382	3,50	5.222.565	246	5.222.319
Piaui	2.673.176	80	2.673.096	2,99	2.673.176	126	2.673.050
Ceará	6.809.794	344	6.809.450	5,05	6.809.794	321	6.809.473
R.Grande do norte	2.558.660	111	2.558.549	4,34	2.558.660	121	2.558.539
Paraiba	3.305.616	139	3.305.477	4,20	3.305.616	156	3.305.460
Pernambuco	7.399.131	563	7.398.568	7,61	7.399.131	349	7.398.782
Alagoas	2.633.339	95	2.633.244	3,61	2.633.339	124	2.633.215
Sergipe	1.624.175	82	1.624.093	5,05	1.624.175	77	1.624.098
Bahia	12.541.745	515	12.541.230	4,11	12.541.745	592	12.541.153
Total	44.768.201	2.112	44.766.089	4,72	44.768.201	2.112	44.766.089
Corelação Pearson	0,892832838						
Valor de Prova	0,000000000						

$$\frac{A}{P \div 100000} \quad (2)$$

Onde

A são os casos notificados;

P é a população residente;

M=P-A são os dados não AIDS;

$$P_n = \frac{P_1 A_8}{P_8} \quad (3)$$

A equação (3) representa a parte esperada e P_n varia de 1 a 7, a coluna "NÃO AIDS" é análoga a parte dos dados reais.

$$\mathsf{d}_{x,y} = \frac{Cov(X,Y)}{\mathsf{d}_x \mathsf{d}_y} \quad (4)$$

A analise dos resultados indicaram a relação entre as duas funções o que era esperado.

O segundo passo foi montar o modelo Matemático, na Tabela 2 foi feita uma mudança de variável, isto é, o ano 1996 foi trocado por 0, e assim sucessivamente, resultando em uma analise de 11 anos.

Tabela 2 - Mudança de variável na tabela de incidência de novos casos.

Regiao Norte				
Ano	Incidencia	Inc. Acum. P(t)	Tempo	Inc. Acumulada
1996	475	475	0	475
1997	600	1075	1	1075
1998	723	1798	2	1798
1999	799	2597	3	2597
2000	893	3490	4	3490
2001	1227	4717	5	4717
2002	1459	6176	6	6176
2003	1574	7750	7	7750
2004	2032	9782	8	9782
2005	2039	11821	9	11821
2006	2037	13858	10	13858

Foi plotado um gráfico que resulta na Figura 5, a metodologia conduz então a procura de um ponto de equilíbrio, como é conhecido que em casos reais o modelo não tende a um crescimento infinito. Portanto foi utilizado o Método Ford-Walford, para calcular a assíntota baseado na Tabela 3.

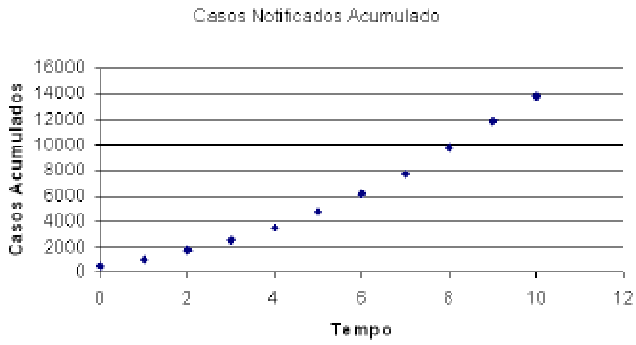

Figura 5 - Dados de incidência notificados.

Tabela 3 – Calculo P* Método Ford Wal Ford

		Calculo P* - Ford-Walford	
Tempo	Inc. Acumulada	y(t)	y(t+1)
0	475	475	1075
1	1075	1075	1798
2	1798	1798	2597
3	2597	2597	3490
4	3490	3490	4717
5	4717	4717	6176
6	6176	6176	7750
7	7750	7750	9782
8	9782	9782	11821
9	11821	11821	13858
10	13858	13858	

Obtemos a equação

$$y = 1{,}1432x + 626{,}86 \quad (5)$$

E resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y(t+1) = 1{,}1432\,y(t) + 626{,}86 \\ y(t+1) = y(t) \end{cases} \quad (6)$$

O valor de estabilidade obtido é negativo, portanto o mesmo não é razoável para confecção do modelo, isto é, o modelo não é uma exponencial assintótica.

Foi utilizado então outro método de estimativa, por hipótese a população tende a um equilíbrio no futuro, e analisando o gráfico temos que em $t = 8$ (como estimado na tabela 4) há um enfraquecimento do crescimento exponencial, sugerindo então uma mudança de concavidade (ponto de inflexão). O que conduz a utilizar a equação logística (7).

$$y(t) = \frac{y^*}{1 + ae^{-bt}} \quad (7)$$

Tabela 4 - Enfraquecimento do crescimento exponencial.

		Calculo P* - Ford-Walford		
Tempo	Inc. Acumulada		y(t)	y(t+1)
0	475		475	1075
1	1075		1075	1798
2	1798		1798	2597
3	2597		2597	3490
4	3490		3490	4717
5	4717		4717	6176
6	6176		6176	7750
7	7750		7750	9782
8	9782		9782	11821
9	11821		11821	13858
10	13858		13858	

É conhecido que uma população cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas eventualmente se estabiliza e aproxima de sua capacidade de suporte, este fato decorre da limitação de recursos. Se $P(t)$ for o tamanho da população no tempo t, assumimos que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \text{ se P for pequeno} \qquad (8)$$

Esta equação diz que a taxa de crescimento esta próxima de ser proporcional ao tamanho da população. Noutras palavras temos que a taxa de crescimento relativo e praticamente constante quando a população é pequena. É necessário refletir sobre o fato de que a taxa de crescimento relativo diminui quando a população **P** aumenta e torna-se negativa **P** ultrapassa sua capacidade suporte **K**. Então temos a expressão mais simples para a taxa de crescimento relativo que incorpora essas hipóteses é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = K\left(1 - \frac{P}{K}\right) \qquad (9)$$

Multiplicando **P** em ambos os membros chegamos a forma da equação logística (10)

$$\frac{dP}{dt} = KP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \qquad (10)$$

Com a equação (10) deduzimos as informações sobre quando as soluções aumentam ou diminuem diretamente. Se a população **P** estiver entre 0 e **K**, então o lado direito da equação é positivo, assim $\frac{dP}{dt} > 0$ e a população aumenta, porém se a população P exceder a capacidade suporte (P>K), então $1 - \frac{P}{K}$ é negativo, assim $\frac{dP}{dt} < 0$ e a população diminui.

Estimado o valor de equilíbrio ver tabela 4, é observado que a maior variação está em t=8, então o intervalo de valores para calcular a maior variação é 9782 e 11821 que é calculado da seguinte forma 11821-9782, isto é $y(t-1) - y(t)$, o maior valor deste intervalo é $y(t+1) = 11821$, que pelas definições do cálculo diferencial é a metade do ponto de inflexão, ou seja, nosso valor de equilíbrio é o dobro de $2y(t+1) = 2(11821) = 23642$.

Conhecendo o valor de y* (valor de equilíbrio) foi construir um gráfico auxiliar isolando em (3) que é o modelo logístico, as variáveis cujos valores já conhecemos que são y^* e $y(t)$ de (7) obtemos (11).

$$ae^{-bt} = \frac{y^*}{y(t)} - 1 \qquad (11)$$

Usando a tabela 5 e o gráfico auxiliar (Figura 5) obtemos os valores de a e b. Calculados os valores de **a=31.795** e **b=-0.3933**, retomado o trabalho com a equação logística (7) é construído a equação (12)

Tabela 5 - Valores de (y*/y) -1 versus tempo

Tempo	(y*/y)-1
0	48,77263
1	20,99256
2	12,14905
3	8,103581
4	5,774212
5	4,012084
6	2,828044
7	2,050581
8	1,416888
9	1
10	0,706018

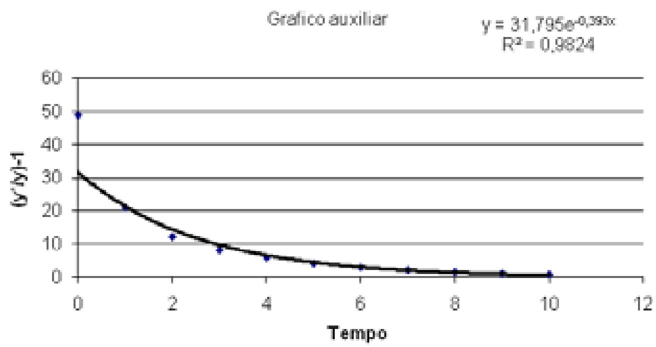

Figura 6 - Gráfico auxiliar

$$y(t) = \frac{23642}{1 + 31,795e^{-0,393t}} \quad (12)$$

A equação (12) é o modelo da região norte do Brasil, os demais modelos que foram construídos são análogos a este, da equação (12) temos o gráfico (Figura 7) que é o modelo.

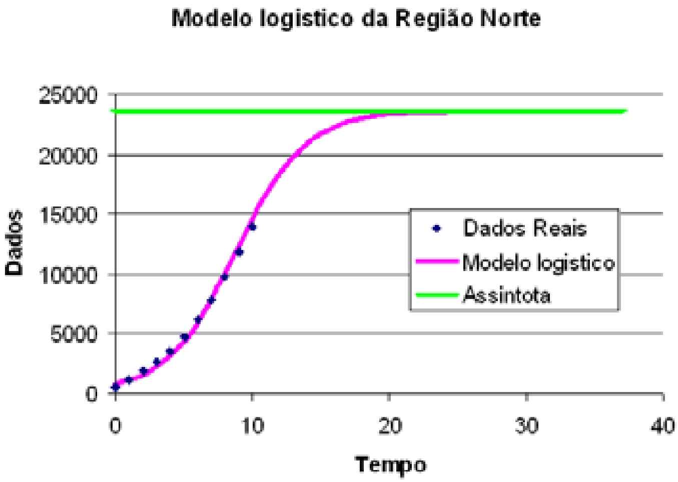

Figura 7 - Modelo logístico obtido através dos dados de incidência de HIV/AIDS [4, 5]

3.2 – Aplicações no Ensino Médio

Atualmente a secretaria de educação do estado de São Paulo vem implantando uma nova proposta curricular, onde colhemos a (tabela 6), que apresenta os conteúdos que devem ser ministrados na primeira série do ensino médio.

Analisando estes conteúdos podemos visualizar todo o aparato necessário para aplicarmos a modelagem matemática está nesta serie, como segue: - Ao discutir o assunto de conjuntos podemos introduzir a idéia de números de casos no mundo, e ir criando subconjuntos até chegarmos ao Brasil. Conceituando assim conjunto subconjunto, intersecção, união e os demais assuntos deste tópico. - Ao discutirmos regularidades numéricas podemos utilizar as tabelas usadas na confecção dos modelos para que os alunos procurem semelhanças, isto é, construam os ajustes usando diferenças finitas, ou ainda, progressões. - No segundo bimestre em diante estabelecer o conceito de dependência e independência utilizando a população e os casos notificados é uma boa opção. Os demais tópicos já vão de encontro com a proposta de construir o modelo, visto que a partir de equações da reta podemos fazer analogias. - No terceiro bimestre é o fechamento do modelo onde, os discentes devem já devem estar produzindo modelos, utilizando os conceitos de exponenciais, logaritmos, equações e inequações.

Tabela 6 - Conteúdos que devem ser ministrados na primeira serie do ensino médio.

1ª – Série	
1º - Bimestre	2º - Bimestre
Números e seqüências	Funções
• Conjuntos numéricos • Regularidades numéricas: seqüências • Progressões aritméticas e progressões geométricas	• Relação entre duas grandezas • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado • Função de 1º Grau. • Função de 2º grau
3º - Bimestre	4º - Bimestre
Exponencial e logarítmica	Geometria Trigonometria
• Crescimento exponencial • Função exponencial: equações e inequações. • Logaritmos: definição e propriedades. • Função logarítmica: equações e inequações.	• Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. • Resolução de triângulos: lei dos senos e lei dos cosenos.

4 - Considerações Finais

É fato que um simples ajuste não é necessariamente uma modelagem. Contudo é um meio motivador aos discentes do ensino médio. Porém não devemos esquecer que em um modelo deve valorizar capacidade de previsão que este ajuste oferece, isto é, não é relevante para a Modelagem Matemática uma situação perfeitamente ajustada se não financia algum tipo de previsão.

O docente enfrenta uma nova forma de avaliação, e reavaliação, quero dizer com isso que o processo deve ser avaliado continuamente para que sejam verificados e corrigidos erros, e como fonte motivadora para os discentes, inclusive com a paixão de deve ter um docente pela Matemática.

Quanto às previsões que podemos fazer com os modelos obtidos neste trabalho, se não houver mudança no meio, serão: - Estimativa de número de casos em um determinado tempo; - Cálculo da estimativa de estabilidade em anos; - Tomada de decisões quanto à aplicação de recursos em regiões onde o numero de casos esta aumentando; - Decidir por campanhas de prevenção em regiões onde há um menor grau de independência das variáveis. A despeito de toda particularidade que cada região possui, foi possível verificar que os modelos definidos referentes as regiões brasileiras possuem certa identidade, isto é, todas parecem ter um comportamento semelhante, mas com pontos de equilíbrio distintos, fato devido à diversidade de cada uma das regiões.

5 - Referências Bibliográficas

1. Bassanezi, R. C.; Ferreira, W. C. Jr. Equações diferencias com aplicações. São Paulo: Harbra; 1998.

2. Bassanezi, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto; 2006.

3. Freire, P. – Pedagogia da autonomia: saberes necessário à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra; 1996.